1	2	3	4	5
2	0	-	5	0

11-03

77, -77

① Решение: 1) Выпишем все делители 77, $\in Z$: 1, 7, 11, -1, -7, -11.

Рассмотрим случай, когда наибольшее произведение - это $1\cdot77$, тогда они же и будут единственными положительными числами на доске. Чтобы получить максимальное кол-во чисел, возьмём наибольшее произведение $7\cdot11$, а наименьшее $(-7)\cdot(-11)$. Тогда ряд чисел может быть: -11, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11. Итого 17 чисел.

Ответ: 17.

② Решение: Попробуем сделать так, чтоб в множествах не совпадали числа. Пусть в множестве A все числа чётные, а во втором, B, нечётные. 1 случай, n - чётное число:

$S_1 = \frac{2\cdot1+2(n-1)}{2}\cdot n = n^2$ - для множества B, нечётные.

$S_2 = \frac{2\cdot2+2(n-1)}{2}\cdot n = n^2+n$ - для множества A, чётные.

Чтобы множество удовлетворяло условию, нужно от какого-то числа отнять n. Т.к. в множестве A чётные числа и n чётное, то и получившееся число чётное, значит не совпадёт с числами из множества B.

A если n - нечётное, то, отняв от какого-нибудь числа n (даже если разбить n на несколько чисел, какое-то останется нечётным), мы получим нечётное число, которое есть в множестве B. Т.о. при нечётном количестве чисел, невозможно, чтоб не нашлось одно и то же число в множествах A и B.

11 03

(4) Пусть $p = 41$, и $y = 20$, тогда $py + 1 = 821$, это число невозможно представить как произведение чисел > 20.

(5) Решение: 1) Найдём сумму больших:

$S_б = \frac{N + N^2}{2} \cdot N = \frac{N^2 + N^3}{2}$

2) Найдём сумму маленьких:

$S_м = \frac{1 + N}{2} \cdot N = \frac{N + N^2}{2}$

3) Тогда их разность:

$S_б - S_м = \frac{N^2}{2} + \frac{N^3}{2} - \frac{N}{2} - \frac{N^2}{2} = \frac{N}{2}(N^2 - 1).$

При $N = 1$, получим ноль, тогда проверим $N = 2$:

$\frac{2}{2}(2^2 - 1) = 3$

Ответ: 3

$\frac{5}{2} \cdot 24 = 60.$

$\cancel{4} \cdot \cancel{16} = 80$

11-03

⑥ Решение: 1) Чтобы выполнялось условие, при котором функция принимает неотрицательные значения при положительных значениях аргумента, а при отрицательных значениях аргумента - неположительные, можно составить такую функцию: произведение 2-х функций, где одна всегда положительна при любых значениях аргумента, а другая при положительных неотрицательна, а при отрицательных неположительна, например x^{2n+1} (в нечётной степени). Тогда вторая функция в произведении может быть x^{2n} (в чётной степени) и какая-то положительная константа. Методом подбора составили подобную функцию:

Подходящая: $(x^4+1)(x^3+1)-(x^4+1) = x^7+x^4+x^3+1-x^4-1 =$
$= x^7+x^3 = x^3(x^4+1)$.

6	7	8	9	10
7	0	5	2	0

Рассмотрим: $y = x^3(x^4+1)$. Система $\begin{cases} y = x^3, & >0 \text{ при } x>0,\ <0 \text{ при } x<0 \\ y = x^4+1, & >0 \text{ при } x \in R \end{cases}$

⑦ Решение: 1) Любое число 2^N - чётное, так как это произведение чётных чисел 2. Чтобы представить чётное число в виде суммы 2-х чисел, нужно или взять два чётных числа, или два нечётных числа. Т.к. $2a+2b = 2(a+b)$ - кратно 2, значит чётное, и $2a+1+2b+1 = 2a+2b+2 = 2(a+b+1)$ - кратно 2, значит чётное.

~~Если раскрасить все чётные числа одним цветом, а нечётные другим, то невозможно будет~~. Значит, нужно найти такое возможное распределение, ~~чтоб~~ никакие два чётных или два нечётных числа числа одного цвета не давали в сумме степень 2. Рассмотрим числа от 1 до 16.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Пусть 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9 одного цвета, а остальные другого. Казалось бы, теперь всё удовлетворяет условию. Но в группе 1-8 можно составить суммы $1+3=4=2^2$, $2+6=8=2^3$. С другими числами >16 также

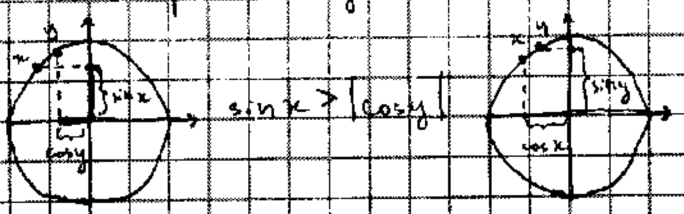
Ответ: нет

⑧ Дано: $\begin{cases} \sin x + \cos y > 0, \in R \\ \sin y + \cos x > 0, \in R \end{cases}$

Решение: Данная система возможна, если и x, и y находятся в I четверти тригонометр. круга. Но любое из них может быть и во II четверти, если $|\cos x| < \sin y$ и $|\cos y| < \sin x$.

Если сумма рациональное, то и слагаемые тоже $\Rightarrow$ $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$, $\cos y$ можно представить в виде дроби.

Рассмотрим случай со II-ой четвертью.



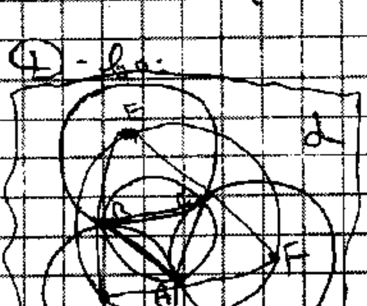
т.о. и $\sin x > |\cos x|$, значит $\sin x + \cos x > 0$ в любом случае, тогда мы можем оба слагаемых домножить на такое n или m, чтоб избавить дробное число от знаменателя и получить целое. Т.к. сумма положительна, то её значение тогда будет $\in N$, натуральное.

⑨ Дано: окр$_1$ касается окр$_2$ = A, окр$_1$ кас-ся окр$_3$ = C, окр$_2$ кас-ся окр$_3$ = B

окр$_1$, окр$_2$, окр$_3$ кас-ся пл. α = D, E, F

Д-ть: R_1 (опис. окр. ок. ABC) < R_2 (опис. окр. ок. DEF)

Д-во:



1) отрезки DE, EF и FD представляют собой суммы радиусов соответствующих (касающихся окр-ей) т.к. их радиусы $\perp$ пл. α и образуют с ней прямоугольники, где противоположные стороны равны (св-во прям-ка) 2) точки A, B, C лежат на отрезках, соединяющих центры окр-ей (по св-ву). Т.о. AB, BC, AC – хорды окр-тей, причем меньше, чем их диаметры. А если найти P-периметр DEF, то он будет сумма диаметров всех 3-ёх окр-тей, тогда ясно, что площади $S_{ABC} < S_{DEF} \Rightarrow R_1 < R_2$, ч.т.д.

⑩ Решение: 1)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$g(x) = a_1x^2 + b_1x + c$

$0 + 0 + c = f(t)$

Пусть первый ход $t = 0$. Он назовет Васе узнает c. Вторым ходом он может назвать $t = 1$, получит $a + b + c = f(t)$, зная c и значение функции, он найдёт сумму $a + b$. Третьим ходом Вася может назвать любое удобное число >1, например, 2. Тогда:

$4a + 2b + c = f(2)$

$2(b + 2a) = f(2) - c$; $b + 2a = \frac{f(2)-c}{2}$, а т.к. из второго шага он может выразить $b = -a + f(t) - c$, то, решив систему:

$$\begin{cases} b = \frac{f(2)-c}{2} - 2a \\ b = f(1) - a - c \end{cases}$$

он сможет найти a, затем подставить в одно из ур-й системы и найти b. Если Петя будет всё время называть значение $f(t)$, то Васе будет достаточно 3 хода, чтоб определить многочлен $f(x)$. Если Петя будет называть и $f(t)$ и $g(t)$, то Васе придётся дублировать каждый ход, чтоб понять к какому из многочленов относится найденное c/a/b.

Это оптимальный вариант. Но Васе придётся на 2-ом шаге посчитать $a+b$ для 4-ех многочленов. А на 3ем 8 вариантов a и b для разных $(a+b)$ в зависимости от $f(x)$ и $g(x)$, что назовет Петя. Одно из восьми выражений будет точно Правильно.

Ответ: 6